A Hardy Space Approach to Lagrangian Floer gluing

Doctoral Thesis

Author(s):
Simčević, Tatjana

Publication date:
2014

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-010271531

DISS. ETH NO. 22118

A Hardy Space Approach to Lagrangian Floer gluing

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

Tatjana Simčević

Master of Mathematics, Univesity of Belgrade

born on 08.09.1982

citizen of Serbia

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Dietmar Salamon, examiner
Prof. Dr. Paul Biran, co-examiner
Prof. Dr. Urs Frauenfelder, co-examiner

2014

Abstract

We develop a new approach to Lagrangian-Floer gluing. The construction of the gluing map is based on the intersection theory in some Hilbert manifold of paths $\mathscr{P}$. We consider some moduli spaces of perturbed holomorphic curves whose domains are either strips or more general Riemann surfaces with strip-like ends. These moduli spaces can be injectively immersed, by taking the restriction to non-Lagrangian boundary, into the Hilbert manifold $\mathscr{P}$.

Then we restrict our attention to some subsets $\mathscr{M}^\infty(\mathscr{U})$ and $\mathscr{M}^T(\mathscr{U})$ of the aforementioned moduli spaces of perturbed holomorphic strips. These moduli spaces consist of small energy curves whose non-Lagrangian boundary is conatined in the neighbourhood $\mathscr{U}$ of a fixed Hamiltonian path x. Monotonicity results will gurantee that the elements of these moduli spaces are contained in some neighbourhood of the Hamiltonian path x. This will allow us to carry over the main analysis in suitable local coordinate charts.

The moduli spaces $\mathscr{M}^T(\mathscr{U})$ and $\mathscr{M}^\infty(\mathscr{U})$ turn out to be embedded submanifolds of the Hilbert manifold of paths $\mathscr{P}$. We prove that $\mathscr{M}^T(\mathscr{U})$ converges in the C^1 topology toward $\mathscr{M}^\infty(\mathscr{U})$. As an application of this convergence result we prove various gluing theorems. We explain the construction of Lagrangian-Floer homology and prove that the square of the boundary map is equal to zero. Here we restrict our discussion to the monotone case with minimal Maslov number at least three. We also prove that the homology is independent of the Hamiltonian and almost complex structure used in its definition. We include the exposition of the Lagrangian-Floer-Donaldson functor and Seidel homomorphism.

Zusammenfassung

Wir entwicklen einen neuen Ansatz für Lagrange-Floer- Kleben. Die Konstruktion der Verklebeabbildung ist auf Schnitttheorie für eine Hilbertmannigfaltigkeit von Pfaden $\mathscr{P}$ aufgebaut. Wir betrachten einige Moduli-Räume von gestörten holomorphen Kurven, deren Definitionsbereich entweder Streifen, oder allgemeiner Riemannsche Flächen mit streifenähnlichen Enden sind. Diese Moduli Räume kann man injektiv in die Hilbertmannigfaltigkeit $\mathscr{P}$ immersieren, indem man die Restriktion der nicht-Lagrange Ränder verwendet.

Dann betrachten wir bestimmte Untermengen $\mathscr{M}^T(\mathscr{U})$ und $\mathscr{M}^\infty(\mathscr{U})$ der vorher genannten Moduli Räume von gestörten holomorphen Streifen. Diese Moduli Räume bestehen aus Kurven mit kleiner Energie, deren nicht Lagrange Rand in einer Umgebung $\mathscr{U}$ eines festen hamiltonschen Pfades x enthalten ist. Monotonieresultate garantieren, dass die Elemente dieser Moduli-R äume in einer Umgebung des hamiltonschen Pfades x enthalten sind. Dies erlaubt uns die Analyse in geeigneten lokalen Kooradinaten auszuführen.

Es stellt sich heraus, dass die Moduli Räume $\mathscr{M}^T(\mathscr{U})$ und $\mathscr{M}^\infty(\mathscr{U})$ eingebettete Untermannigfaltigkeiten der Hilbertmannigfaltigkeit der Pfade $\mathscr{P}$ sind. Wir zeigen, dass $\mathscr{M}^T(\mathscr{U})$ in der C^1-Topologie gegen $\mathscr{M}^\infty(\mathscr{U})$ konvergiert. Als Anwendung dieses Konvergenzresultats zeigen wir verschiedene Kleben Theoreme. Wir erklären die Konstruktion der Lagrange-Floer Homologie und zeigen, dass das Quadrat der Randabbildung verschwindet. Hier beschränken wir uns auf die Diskussion im monotonen Fall mit minimaler Maslov Nummer grösser oder gleich drei. Wir zeigen auch, dass die Homologie unabhängig von der in der Definition verwendeten hamiltonsche Funktion und fastkomplexen Struktur ist. Wir geben eine Exposition des Lagrange-Floer-Donaldson-Funktors und des Seidel- Homomorphismus an.